Αναλυτική Γεωμετρία 19/2/2016

Μαθημα 2º

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R}\}$ το μοντελο αυτο επαληθευει το (Θ1) απο δυο σημεια διερχεται μοναδικη ευθεια

Αποδειξη

Εστω $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ δυο σημεια

$P_1, P_2 \in (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ } Υπαρξη

Αρκει να δειξουμε οτι (α) την υπαρξη (β) τη μοναδικοτητα

Εστω $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ευθεια που ανηκουν τα P_1, P_2 και $\alpha, \beta \neq 0$

Υποθετω αντιθετα οτι $\exists\ \varepsilon_2: \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ για τα οποια $P_1, P_2 \in (\varepsilon_2)$ και $\alpha', \beta' \neq 0$

$$(\Sigma)\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

Αφου P_1, P_2 επαληθευουν τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2) \Rightarrow$ ειναι δυο διαφορετικες λυσεις του (Σ)

Συνεπως το (Σ) συμβιβαστο {εφοσον εχει λυση} $\Leftrightarrow rank(A) = rank(A|B)$

Παιρνω πινακα συστηματος

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}$$

Παιρνω και τον επαυξημενο

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Μια παρενθεση...

Συνεπώς $rank(A) = rank(A|B) < 2$ και $(\alpha,\beta), (\alpha',\beta') \neq (0,0)$

τότε σίγουρα η βαθμίδα δεν είναι 0 άρα $rank(A) = rank(A|B) = 1$

$\Rightarrow$ τα (α,β,γ), (α',β',γ') είναι γραμμικά εξαρτημένα

$\Rightarrow$ $(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda(\alpha',\beta',\gamma')$, $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ το οποίο είναι άτοπο!

{ γιατί ξεκινησα με δυο διαφορετικες ευθειες }

⊕ $\mathbb{R}^2$ // Αξίωμα Παραλληλίας

Απο σημειο Α και ευθεια (ε) αγεται το πολυ μια ευθεία παράλληλη προς την (ε)

Αποδειξη

Εστω $(\varepsilon_1): \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ και εστω $P(x_0, y_0)$ εκτος της (ε)

Παρατηρουμε οτι ισχυει η

$(\varepsilon): \alpha_1 x + \beta_1 y + (-\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0) = 0$. Προφανως $P(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ $(\Sigma) \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + (-\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0) = 0 \end{cases}$

Εστω αντιθετα οτι οχι παραλληλες $\Rightarrow$ εχουν κοινη λυση $\Rightarrow$

$\gamma_1 = -\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0$ $\Rightarrow$ η $(\varepsilon_1): \alpha_1 x + \beta_1 y + (-\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0) = 0$ $\Rightarrow$ το $P \in (\varepsilon_1)$

ατοπο

Μεχρι τωρα δειξαμε την υπαρξη

Μενει να δειξουμε οτι η (ε) μοναδικη παραλληλη προς την (ε_1)

(που διερχεται απο το P)

Εστω αντιθετα οτι $\exists$ $(\varepsilon_2) \neq (\varepsilon)$ με $(\varepsilon_2): \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$, $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$

τετοια ωστε (α) $P(x_0, y_0)$ να διερχεται απο (ε₂) (β) $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_1$

Το $P(x_0, y_0)$ επαληθευει

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon)\ \alpha_1 x + \beta_1 y + (-\alpha_1 x - \beta_1 y) = 0 \\ (\varepsilon_2)\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0\end{array}\right\} (\Sigma)$$

και γνωριζουμε οτι δυο ευθειες διαφορετικες εχουν το πολυ ενα κοινο σημειο

Συνεπως το (Σ) έχει μοναδική λυση $\Rightarrow \det \Sigma \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (*)$$

Παρατηρουμε οτι το (Σ) εχει κοινή οριζουσα με το (Σ')

λογω $(*)$ το (Σ') εχει λυση $\Rightarrow$ υπαρχει κοινο σημειο στις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

ατοπο λογω (β)

$$\text{με} \quad (\Sigma') \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

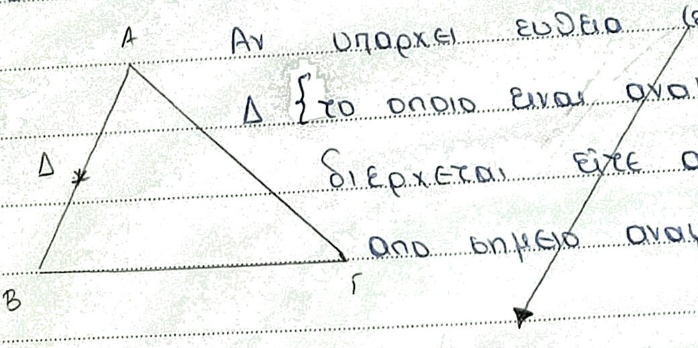
Αξιωματα Διαταξης

Δ1) Αν το σημειο Β ειναι αναμεσα στα Α, Γ $\Rightarrow$ τα Α, Β, Γ διαφορετικα ανα δυο {στη μοναδικη ευθεια που τα περιεχει} και το Β βρισκεται αναμεσα στα Γ, Α

Δ2) Μεταξυ δυο σημειων ΠΑΝΤΑ υπαρχει ενα τριτο, αναμεσα σε αυτά τα δυο

Δ3) Δοθεντος τριων (διαφορετικων) συνευθειακων σημειων, παντα το ενα ειναι αναμεσα στα αλλα δυο

Δ4) (Pasch) : Εστω Α,Β,Γ τρια διαφορετικα μη-συνευθειακα σημεια. Αν υπαρχει ευθεια (ε) η οποια διερχεται απο σημειο Δ {το οποιο ειναι αναμεσα στα Α,Β} τοτε η (ε) διερχεται είτε απο σημειο αναμεσα στα Β,Γ είτε απο σημειο αναμεσα στα Α,Γ



η (ε) δεν διερχεται απο τα Α,Β,Γ παντα

Αξιωματα Ισοτητας

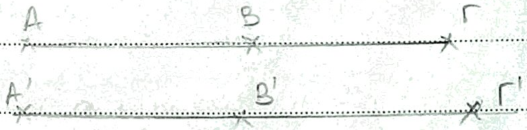
Ι1) Εστω ΑΒ ευθυγραμμο τμημα και εστω Γ σημειο εκτος του ΑΒ. Τοτε υπαρχει μοναδικο Δ σημειο τετοιο ωστε $AB = \Gamma\Delta$ {στην ημιευθεια με αρχη το Γ}

Ι2) Αν $AB = \Gamma\Delta$ και $AB = EZ \Rightarrow \Gamma\Delta = EZ$

Επιπλεον καθε ευθυγραμμο τμημα ειναι ισο με τον εαυτο του.

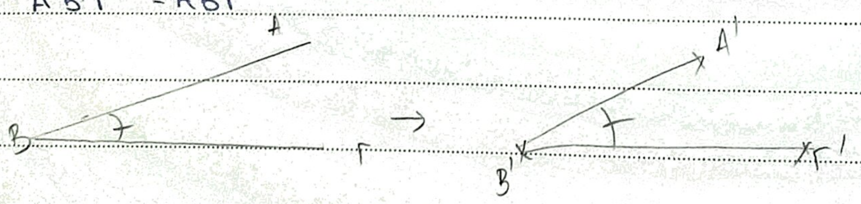
Ι3) Εστω Β σημειο αναμεσα στα Α,Γ

Εστω Β' σημειο αναμεσα στα Α',Γ'



Αν $AB = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma' \Rightarrow A\Gamma = A'\Gamma'$

Ι4) Εστω γωνια $A\hat{B}\Gamma$ και εστω ημιευθεια Β'Γ'. Τοτε υπαρχει ημιευθεια Β'Α' : $A'B'\Gamma' = AB\Gamma$



Ι5) Αν α, β, γ γωνιες, $\alpha = \beta$ και $\alpha = \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$

Ι6) Αν $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ τριγωνα τετοια ωστε $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A'}\Gamma'$ τοτε και οι υπολοιπες γωνιες ισες $A\hat{B}\Gamma = A'\hat{B'}\Gamma'$ και $A\hat{\Gamma}B = A'\hat{\Gamma'}B'$

Ορισμος Διανυσματικος Χωρος $\xrightarrow{}$ Για εμας το σωμα ειναι το $\mathbb{R}$

Ειναι ενα συνολο Δ {"επι" ενος σωματος $\mathbb{F}$} , τα στοιχεια του οποιου καλουνται διανυσματα , εφοδιασμενος με δυο πραξεις :

$\boxed{\mathbb{F} = \mathbb{R}}$

- Προσθεση "+" : $\Delta \times \Delta \longrightarrow \Delta$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$$

- βαθμωτος πολ/σμος "·" : $\mathbb{F} \times \Delta \longrightarrow \Delta$

$$(\lambda, \vec{u}) \longmapsto \lambda \vec{u}$$

Τετοια ωστε να ικανοποιουνται τα παρακατω

- Για την "+" : (1) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$

(2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{z}$

(3) $\exists\, \vec{0} \in \Delta : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} \quad , \forall\, \vec{x} \in \Delta$

(4) $(\forall\, \vec{x} \in \Delta)(\exists\, \vec{y} = (-\vec{x}) \in \Delta) : \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$

- Για την "·" : (5) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

(6) $\lambda(\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu)(\vec{x}) \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad , \vec{x}, \vec{v} \in \Delta$

(7) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

(8) $\exists\, 1 \in \mathbb{F} : 1\vec{x} = \vec{x} \quad , \forall\, \vec{x} \in \Delta$

Παραδειγματα

① $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$

οπου οριζουμε "+" : $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

"·" : $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

② $M_{2\times2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \,/\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

"+" : $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}$

" . " $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix}$

Γραμμικά Ανεξάρτητα / Εξαρτημένα

Ορισμός

Έστω Δ διανυσματικός χώρος και $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in \Delta$

- Τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$ τέτοια ώστε $\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0} = (0, \ldots, 0)$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
- Τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ γραμμικά ανεξάρτητα αν $\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$

π.χ

1) $(1,2), (2,4) \in \mathbb{R}^2$. Είναι Γραμ. Εξαρτ.?

Έστω $\lambda_1(1,2) + \lambda_2(2,4) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, 4\lambda_2) = (0,0) \Rightarrow$

$(\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$

Έχω ομογενές γραμμικό σύστημα τότε ή ① Μοναδική λύση $= 0 \overset{\det\Sigma \neq 0}{\Leftrightarrow}$

ή ② Άπειρες $\Leftrightarrow \det \Sigma = 0$

$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ Άρα έχω άπειρες λύσεις

Άρα τα $(1,2), (2,4) \in \mathbb{R}^2$ είναι Γραμ. Εξαρτ.

$\left\{ (\Sigma) \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \right\}$

Για να βρούμε μια σχέση γραμ. εξάρτησης βάζουμε τιμές ($\neq 0$) τυχαίες

(γνωρίζω ότι $\lambda_1 = -2\lambda_2$) π.χ $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \Rightarrow (-2)(1,2) + 1(2,4) = (0,0)$

2) $(1,2)$, $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ Ειναι Γραμ. Ανεξ. ?

$\lambda_1(1,2) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (0, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Οποτε τα διανυσματα $(1,2)$, $(0,1)$ Ειναι Γραμ. Ανεξ.

2ος τροπος

Παιρνω $\det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$ αρα εχει μοναδικη λυση την μηδενικη αρα $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ αρα Γραμ. Ανεξ.

3) $(1,0,2,1)$, $(0,1,0,1)$ ειναι Γ.Α ή Γ.Ε ?

Παιρνω τον πινακα των δυο διανυσματων

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ {θα δουμε πιο μετά την βαθμιδα}

———— * ———— * ———— * ————

Ορισμος

Ενα διανυσμα $\vec{x} \in \Delta$ λεμε οτι γραφεται ως γραμμικος συνδυασμος των $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \Delta$, αν υπαρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (οχι ολοι μηδεν) τετοια ωστε $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k$

π.χ

το $(2,3)$ γραφεται ως γραμμικος συνδυασμος των $(1,1)$, $(0,1)$, $\exists\ \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ αφου $(2,3) = 2(1,1) + 1 \cdot (0,1)$

Ορισμος

Ενας Δ διανυσματικος χωρος λεμε οτι παραγεται απο τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ αν $\forall\ \vec{x} \in \Delta$ $\left(\vec{x} \neq \vec{0}\right)$ $\exists\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) : \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{x}_k$. Τοτε τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ παραγουν το χωρο π.χ

ΘΔΟ τα $(1,1)$, $(0,1)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$

Αν για τυχαίο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 (\neq 0) \in \mathbb{R}$ ώστε

$(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,1) \Rightarrow (x,y) = (\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - x \end{cases}$$

Πραγματικά $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$ όπου $(x, y-x) \neq (0,0)$

αφού $(x,y) \neq (0,0)$

Ορισμός

Έστω διανυσματικός χώρος Δ και $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \Delta$. Το σύνολο $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ λέγεται βάση του Δ αν

(1) τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

(2) τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ παράγουν τον χώρο Δ

π.χ

Είδαμε ότι $(1,1)$, $(0,1)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$

Αυτά είναι και γραμμικά ανεξάρτητα $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 = \langle (1,1), (0,1) \rangle$ μια βάση

Ορισμός

Έστω Δ διανυσματικός χώρος. Διάσταση του δ.χ Δ ($\dim\Delta$) είναι το πλήθος των στοιχείων της βάσης Δ

π.χ

$\dim\mathbb{R}^2 = 2$ (*Αποδεικνύεται ότι για έναν δ.χ Δ οι βάσεις του (άπειρες) έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων)